Pendelkette mit verschieden langen Fäden

Das Fadenpendel

Wir betrachten ein Pendel, das an einem Faden mit der Länge l aufgehängt ist. Wir nehmen an, dass es sich um ein ideales Pendel handelt, d.h. wir vernachlässigen die Reibung und nehmen an, dass die gesamte Masse m in einem Punkt konzentriert ist. Lenkt man das Pendel um einen Winkel φ aus wird es sich durch eine rücktreibende Kraft in Richtung der Ruhelage zurück bewegen. Verantwortlich dafür ist die tangentiale Komponente der Gewichtskraft

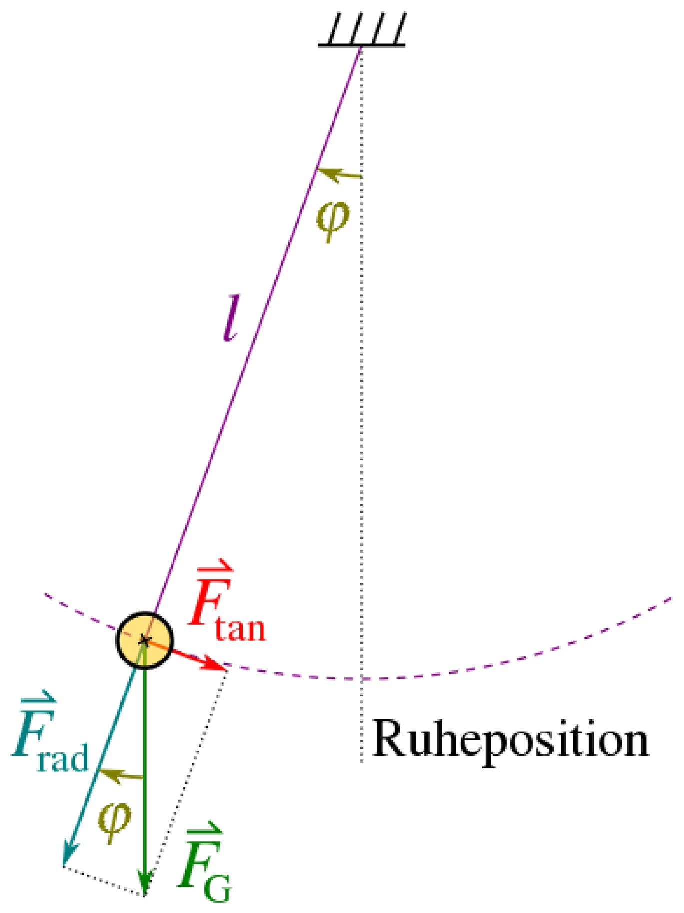
$$F_{\tan} = m \cdot g \cdot \sin\varphi,$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist. Die Bahn, die das Pendel bei der Bewegung beschreibt hat die Länge $l \cdot \varphi$, folglich kann man die tangentiale Beschleunigung $a_{\tan}$ auf der Kreisbahn als $a_{\tan} = l \cdot \ddot{\varphi}$ schreiben.

Wir können nun $F_{\tan}$ und $a_{\tan}$ in die berühmte Formel

$$F = m \cdot a$$

einsetzen:



Es ergibt sich die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot \sin\varphi &= -m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \\ \Leftrightarrow \quad g \cdot \sin\varphi &= -l \cdot \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Für kleine Auslenkwinkel φ kann man die Näherung

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

machen. Dann vereinfacht sich die Differenzialgleichung zu

$$\begin{aligned} g \cdot \varphi &= -l \cdot \ddot{\varphi} \\ \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Geht man davon aus, dass zu Anfang das Pendel um den Winkel A ausgelenkt ist, so ist die Lösung dieser Gleichung

$$\varphi(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right).$$

Es ergibt sich also eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

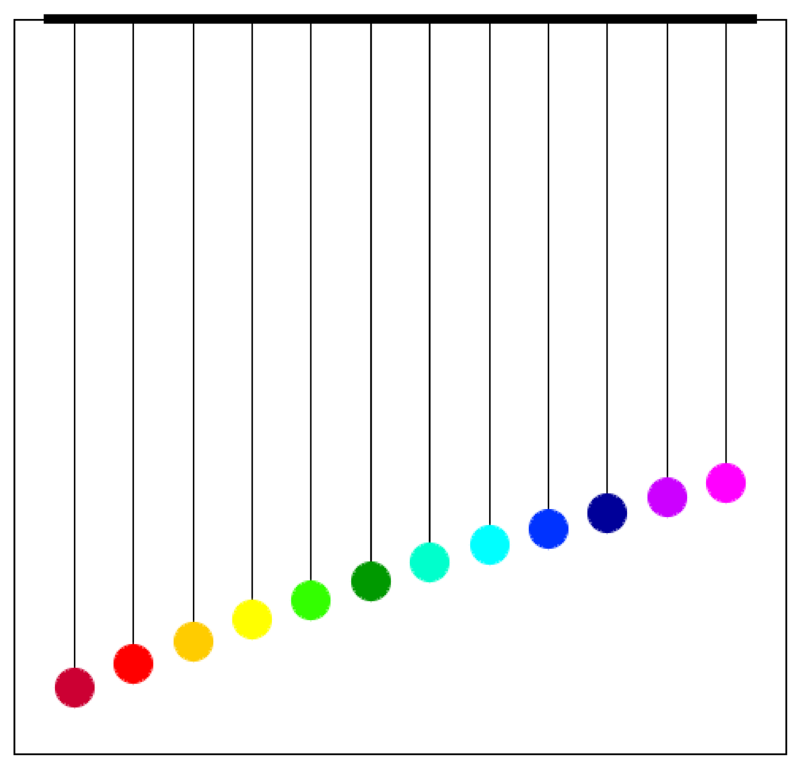
Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels hängt also auf der Erde nur von der Länge l des Fadens ab, an dem es aufgehängt ist.

Die Masse des Pendels oder andere Faktoren spielen keine Rolle.

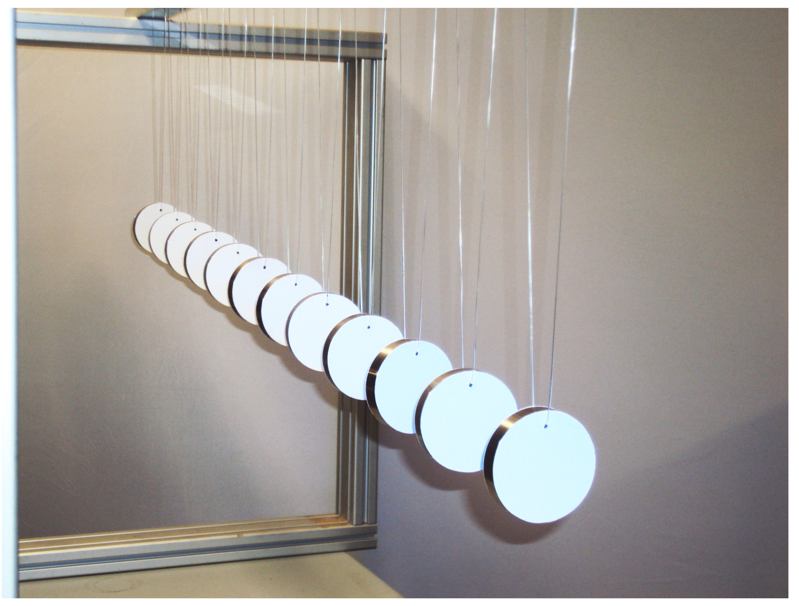
Kette aus Pendeln mit verschiedenen Fadenlängen

Wie links hergeleitet, hängt die Frequenz, mit der ein Pendel pendelt nur von dessen Fadenlänge ab. Man kann nun mehrer Pendel so hintereinander aufhängen, dass die Frequenz, mit der sie schwingen, linear zunimmt:

$$l_i = l_1 \cdot \left(1 + (i-1)\frac{\frac{\omega_N}{\omega_1} - 1}{N-1}\right)^{-2}.$$



In diesem Fall wurden 12 Pendel gewählt, wobei das kürzeste 6 Schwingungen ausführt während das längste 5 mal schwingt.



Lenkt man nun alle Pendel gleich aus und lässt sie gleichzeitig los, so beginnen sie alle mit ihrer eigenen Frequenz zu schwingen. Das tun sie auf Grund der unterschiedlich langen Fäden natürlich unterschiedlich schnell. Also werden sie bald „auseinander laufen“.

Schaut man von vorne auf die Pendel so sieht es aus, als ob sie eine Schlangenbewegung ausführen.

Dann scheinen sie sich zu mischen bis sie mehrere Reihen ausbilden, die gleich schwingen. Man sagt: Die entsprechenden Pendel sind wieder in Phase.

Es ergeben sich immer wieder neue Muster, bis am Ende wieder alle Pendel gleich schwingen und das ganze von vorn beginnt.

Im Schwarzlicht sieht man diese Muster besonders eindrucksvoll.

Literatur

[1] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme*, Springer, 2005.

[2] K. Magnus, *Schwingungen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1961.

[3] www.wikipedia.de, *Mathematisches Pendel*, 2012.

[4] www.youtube.com/watch?v=7_AiV12XBbI, *Amazing Pendulum Wave Effect!*, 2012.