# Versuchsauswertung Gravitationswaage

Sven Lotze

17. November 2009

## 1 Aufbau

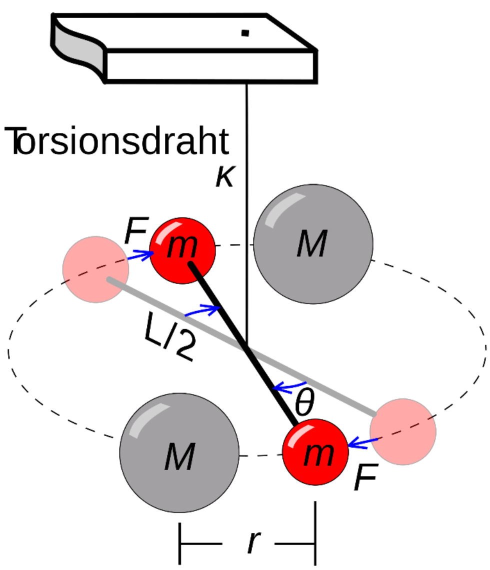


Abbildung 1: Quelle: Wikipedia

## 2 Herleitung

Wir berechnen die Gravitationskonstante aus der gemessenen Beschleunigung des Laserpunktes auf dem Schirm ("Beschleunigungsmethode" in der

Versuchsanleitung von Leybold). Diese bietet den Vorteil, dass eine kürzere Messzeit gebraucht wird als bei der sogenannten Endausschlagmethode.

## 2.1 Näherungen

1. Die Änderung des Abstands $r$ zwischen großer und kleiner Kugel ist so klein, dass der Abstand als konstant angenommen wird.

2. Als Folge wird die Bewegung als geradlinig betrachtet

3. Für die Ablenkung des Lasers auf dem Schirm wird die Kleinwinkelnäherung $sin(2\theta) = 2\theta$ benutzt.

4. Für eine kurze Zeit kann die Beschleunigung der kleinen Kugel als konstant genähert werden, sodass gilt $S = \frac{1}{2}at^2$. In Wirklichkeit ändert sich die Beschleunigung durch die Abstandsänderung zwischen großer und kleiner Kugel sowie durch die Torsion des Torsionsfadens.

## 2.2 Rechnung

Die kleine Kugel der Masse $m$ "fällt" auf die große Kugel der Masse $M$ und wird dabei mit $a$ beschleunigt. Bevor der Versuch gestartet wird, gleicht die durch die Torsion wirkende Kraft $F_{tors}$ genau die Gravitationskraft aus. Dreht man die großen Kugeln nun beim Start um, kehrt sich das Vorzeichen der Gravitation um und beide Kräfte wirken in die gleiche Richtung, $F = F_{tors} + F_g = 2F_g$. Wir betrachten die auf *eine* kleine Kugel wirkenden Kräfte. Es ist

$$F = m \cdot a \tag{1}$$

$$2F_g = m \cdot a \tag{2}$$

$$F_g = \frac{1}{2}m \cdot a \tag{3}$$

(Newton) und das Gravitationsgesetz

$$F_g = G\frac{mM}{r^2} \tag{4}$$

Gleichsetzen:

$$\frac{1}{2}m \cdot a = G\frac{mM}{r^2} \tag{5}$$

$$G = \frac{a \cdot r^2}{2M} \tag{6}$$

Bisher ist $a$ die Beschleunigung der kleinen Kugel selbst, die wir indirekt als Beschleunigung $a'$ des Laserpunktes auf dem Schirm beobachten. Bei der Umrechnung müssen wir beachten, dass der Laserstrahl bei der Reflexion auf dem Spiegel immer um den doppelten Winkel $2\theta$ ausgelenkt wird, um den sich das Pendel verdreht (mit Kleinwinkelnäherung):

$$a' = 2 \cdot a\frac{d}{\frac{L}{2}} \tag{7}$$

$$a = a'\frac{L}{4d} \tag{8}$$

Hierbei ist $\frac{L}{2}$ der Abstand einer kleinen Kugel zum Torsionsband und $d$ der Abstand zum Schirm. Einsetzen ergibt

$$G = \frac{L}{4d}\frac{a' \cdot r^2}{2M} = \frac{La'r^2}{8dM} \tag{9}$$

Schließlich gilt unter der Annahme einer konstanten Beschleunigung

$$a' = \frac{2S}{t^2} \tag{10}$$

mit dem in der Zeit $t$ auf dem Schirm zurückgelegten Weg $S$. Einsetzen in (9) ergibt dann

$$G = \frac{LSr^2}{4dMt^2} \tag{11}$$

# 3 Messergebnisse

Um $a' = \frac{2S}{t^2}$ zu bestimmen, tragen wir alle aufgenommenen Positionen des Laserpunktes auf dem Schirm als Funktion der Zeit auf:

Man erkennt die Schwingung um den neuen Gleichgewichtspunkt. Für kurze Zeiten erscheint eine Parabel jedoch als akzeptable Abschätzung für

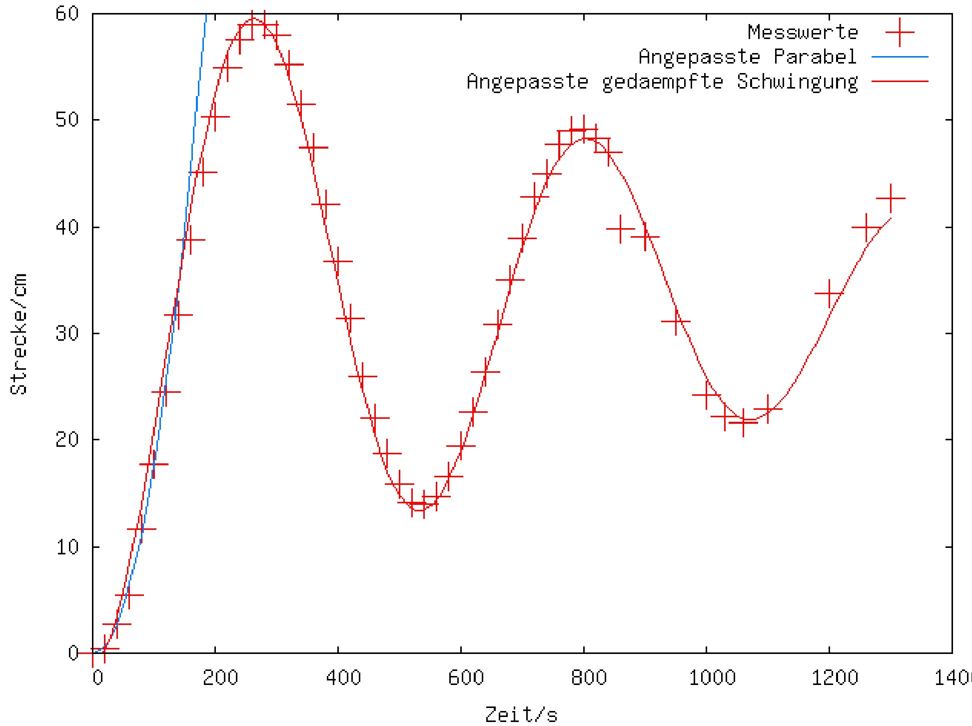


Abbildung 2: Position des Laserpunktes als Funktion der Messzeit

$S(t)$ (gleichbedeutend mit konstanter Beschleunigung). Die Anpassung von $S(t) = \frac{1}{2}a't^2$ liefert $a' \approx 3,54 \cdot 10^{-5} m/s^2$. Nach Einsetzen in (9) folgt mit $r = 4.7cm, d = 13.4m, M = 1,5kg, L = 10cm$ als Wert der Gravitationskonstante

$$G \approx 4,86 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \tag{12}$$

Verglichen mit dem Literaturwert von $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ ist dieses Messergebnis um 27% zu klein.

# 4 Fehlerquellen

1. Beim Umlegen der großen Kugeln zu Beginn der Messung dürfen diese nicht gegen das Gehäuse des Aufbaus stoßen, es gibt daher keine definierte Endposition. Eine Abweichung von $1mm$ führt zu einem Fehler von ca. 4%.

2. Trotz Annahme der konstanten Beschleunigung (gilt offensichtlich nur für kurze Zeiten gegenüber der Schwingungspersiode) wird relativ lange gemessen.