

## Elektronenbeugung an einem polykristallinen Gitter (Debye-Scherrer-Beugung)

### Versuchsziele

- Bestimmung der Wellenlänge von Elektronen anhand der Beugung an einem polykristallinen Gitter
- Bestimmung der *de-Broglie*-Wellenlänge der Elektronen aus der Beschleunigungsspannung
- Bestimmung der Netzebenenabstände von Graphit

### Grundlagen

L. de Broglie stellte 1924 die Hypothese auf, dass auch alle massebehafteten Teilchen ähnlich wie das masselose Photon Teilchen- und Welleneigenschaften haben. Für die Wellenlänge der Teilchen gab er die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (I)$$

mit  $h$ : Plancksches Wirkungsquantum und  $p$ : Impuls des Elektrons an. Seine Überlegungen wurden 1927 von C. Davisson und L. Germer durch die Beugung von Elektronen an polykristallinen Strukturen experimentell bestätigt. Das Ergebnis waren ähnliche Beugungsmuster wie bei der Debye-Scherrer-Beugung von Röntgenstrahlen an polykristallinen Pulverproben.

In der Elektronenbeugungsröhre werden die Elektronen von einer heißen Katode emittiert. Ein elektronen-optisches System erzeugt einen wohldefinierten Elektronenstrahl, wobei die Elektronen durch das Anlegen einer festen Anodenspannung auf eine definierte Geschwindigkeit beschleunigt werden.

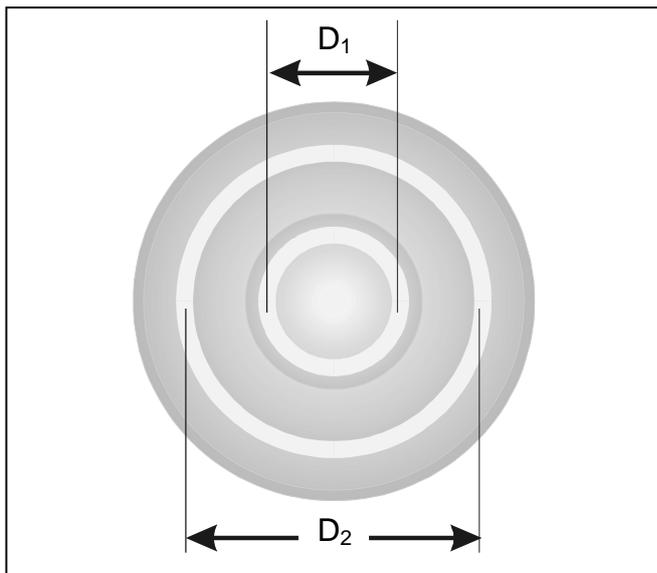


Abb. 1: Schematische Darstellung der Beugungsringe, die aufgrund der Elektronenbeugung an polykristallinem Graphit beobachtet werden.

Der Elektronenstrahl trifft auf eine dünne Folie aus polykristallinem Graphit. Die Graphitatom bilden ein Raumgitter, das als Beugungsgitter für die Elektronen wirkt. Auf dem Fluoreszenzschirm erscheint daher ein Beugungsbild, das aus konzentrischen Ringen besteht, in deren Mitte der Anteil des Elektronenstrahls sichtbar ist, der ungebeugt durch die Folie trifft (siehe Abb. 1). Der Durchmesser der Ringe ist um so größer, je größer die Wellenlänge der Elektronen  $\lambda$  ist, d.h. nach Gleichung (I) je kleiner die Geschwindigkeit der Elektronen und damit je kleiner die Anodenspannung  $U$  ist.

Die Ringe werden durch Beugung von Elektronen an den Netzebenen der Mikrokristallite hervorgerufen. Wenn der Wegunterschied zwischen zwei benachbarten Netzebenen  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 2d \sin \vartheta$  einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge  $\lambda$  entspricht, so erhält man konstruktive Interferenz (siehe Abb. 2). Die Elektronen erfüllen dann die sogenannte Bragg-Bedingung:

$$2 \cdot d \cdot \sin \vartheta = n \cdot \lambda \quad (II)$$

$\lambda$ : Wellenlänge der Elektronen,  $\vartheta$ : Öffnungswinkel des Beugungsrings,  $d$ : Netzebenenabstand

Der Winkel  $\vartheta$ , unter dem die Ringe beobachtet werden, wird Glanzwinkel genannt.

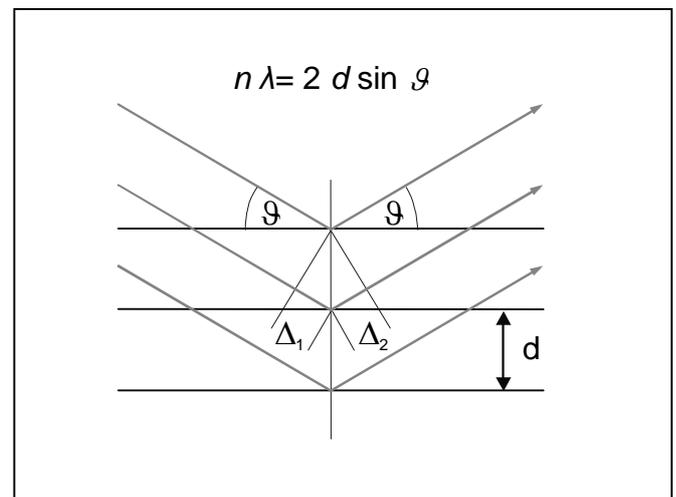


Abb. 2: Schematische Darstellung der Bragg-Bedingung

In einem polykristallinen Material gibt es für jeden Einfallswinkel und jede Wellenlänge Mikrokristallite, die die Bragg-Bedingung (II) erfüllen. Die Reflexe von diesen Kristalliten liegen auf einem Kegel, dessen Symmetrieachse mit der Strahlachse des einfallenden Elektronenstrahls zusammenfällt. Die Graphitstruktur besitzt zwei unterschiedliche Netzebenenabstände (siehe Abb. 3) mit den Werten

$$d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Daher werden in der 1. Ordnung zwei Beugungsringe beobachtet.

Im Experiment kann der Glanzwinkel  $\vartheta$ , unter dem die Ringe beobachtet werden, aus dem Durchmesser  $D$  der Ringe auf dem Schirm und dem Abstand  $L$  zwischen Graphitfolie und Schirm bestimmt werden (siehe Abb. 4):

$$\tan(2\vartheta) = \frac{D}{2L} \quad \text{(III)}$$

Durch Umformen von (III) und Einsetzen in Gleichung (II) erhält man als Gleichung für die 1. Beugungsordnung:

$$\lambda = 2d \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{D}{2L}\right)\right) \quad \text{(IV)}$$

Mit der Näherung für kleine Winkel:  $\tan(2\vartheta) \approx \sin(2\vartheta) \approx 2 \sin \vartheta$  kann die Formel noch deutlich vereinfacht werden zu

$$\lambda = d \frac{D}{2L} \quad \text{(V)}$$

Damit kann durch die Messung des Ringdurchmessers  $D$  und des Abstands  $L$  zwischen Graphitfolie und Schirm die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt werden, wenn der Netzebenenabstand  $d$  bekannt ist.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Wellenlänge  $\lambda$  ergibt sich im Experiment direkt aus der von *de Broglie* aufgestellten Beziehung:  $\lambda = \frac{h}{p}$ .

Die Elektronen haben durch das Anlegen einer bekannten Anodenspannung  $U$  eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}} \text{ bzw. einen Impuls } p = mv = \sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot U}$$

( $m$ : Elektronenmasse,  $e$ : Elementarladung).

Die *de-Broglie*-Wellenlänge der Elektronen beträgt damit

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot U}} \quad \text{(VI)}$$

Wird die Wellenlänge  $\lambda$  aus der angelegten Beschleunigungsspannung bestimmt, kann über Gleichung (V) auch der Netzebenenabstand  $d$  des verwendeten Kristallgitters berechnet werden. Trägt man den Ringdurchmesser  $D$  über  $\frac{1}{\sqrt{U}}$  ( $U$ : Beschleunigungsspannung) auf, so liegen die Mess-

punkte auf einer Geraden mit der Gleichung  $D = \frac{k}{\sqrt{U}}$ , deren

Steigung  $k$  gegeben ist durch

$$k = \frac{2 \cdot L \cdot h}{d \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot e}} \quad \text{(VII)}$$

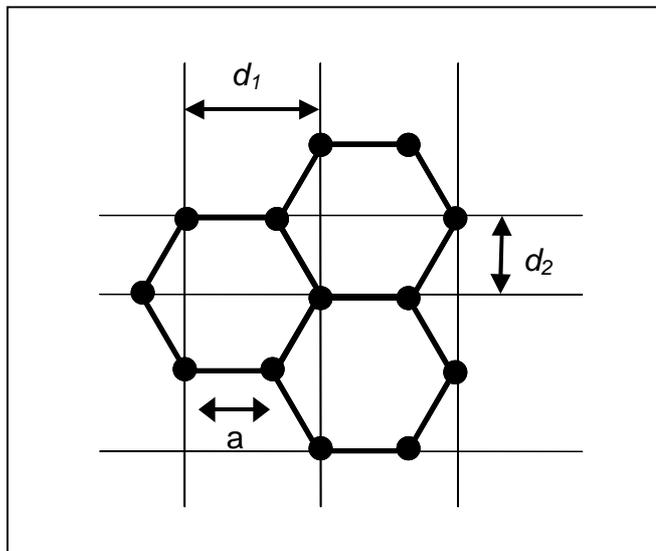


Abb. 3: Hexagonale Struktur von Graphit

Atomabstand  $a = 1,42 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Netzebenenabstände  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Durch die Bestimmung der Steigung kann daraus der Netzebenenabstand  $d$  des verwendeten Kristallgitters bestimmt werden über

$$d = \frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot e}} \quad \text{(VIII)}$$

Im Experiment werden zuerst für verschiedene Beschleunigungsspannungen  $U$  die Ringdurchmesser  $D_1$  und  $D_2$  der Beugungsringe bestimmt. Zusätzlich wird der Abstand  $L$  zwischen Graphitfolie und Schirm gemessen. Durch Einsetzen der Literaturwerte für die Netzebenenabstände  $d_1$  und  $d_2$  wird daraus die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt.

Anschließend wird die Wellenlänge  $\lambda$  über die von *de Broglie* aufgestellten Beziehung bestimmt und mit den Ergebnissen aus dem ersten Versuchsteil verglichen.

Zuletzt werden aus den Ringdurchmessern  $D_1$  und  $D_2$  der Beugungsringe, dem Abstand  $L$  zwischen Graphitfolie und Schirm und der aus der Beschleunigungsspannung  $U$  berechneten Wellenlänge  $\lambda$  die Werte für die Netzebenenabstände  $d_1$  und  $d_2$  bestimmt und mit den Literaturwerten verglichen.

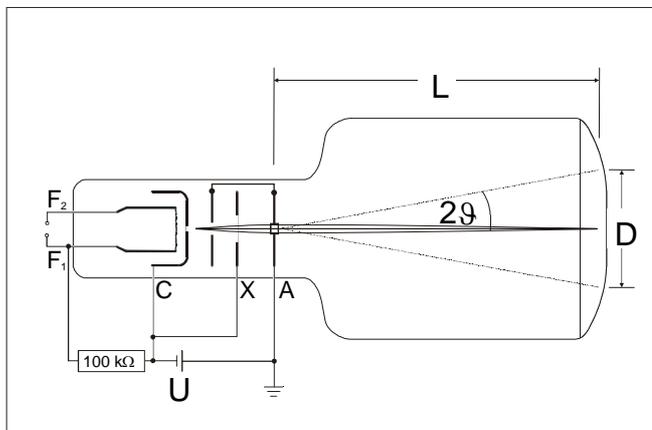


Abb. 4: Schemazeichnung der Röhre für die Bestimmung des Glanzwinkels  $\vartheta$

**Geräte**

- 1 Elektronenbeugungsröhre .....555 626
- 1 Röhrenständer.....555 600
- 1 Hochspannungsnetzgerät 10 kV .....521 70
- 1 Präzisions-Messschieber .....311 54
- 1 Sicherheits-Experimentierkabel, 25 cm, rot.....500 611
- 1 Sicherheits-Experimentierkabel, 50 cm, rot.....500 621
- 1 Sicherheits-Experimentierkabel, 100 cm, rot.....500 641
- 1 Sicherheits-Experimentierkabel, 100 cm, blau ....500 642
- 2 Sicherheits-Experimentierkabel, 100 cm, schw..500 544

**Sicherheitshinweise**

Bei Betrieb der Elektronenbeugungsröhre mit Hochspannungen über 5 kV wird Röntgenstrahlung erzeugt.

- Elektronenbeugungsröhre nur mit Hochspannungen bis 5 kV betreiben.

Implosionsgefahr: Die Elektronenbeugungsröhre ist eine Hochvakuumröhre aus dünnwandigem Glas.

- Elektronenbeugungsröhre keinen mechanischen Belastungen aussetzen und nur im Röhrenständer beschalten.

Die Elektronenbeugungsröhre kann durch zu große Spannungen oder zu große Ströme zerstört werden.

Gebrauchsanweisungen zur Elektronenbeugungsröhre (555 626) und zum Röhrenständer (555 600) beachten.

**Aufbau**

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 5 gezeigt. Für den Aufbau sind folgende Schritte nötig:

- Elektronenbeugungsröhre waagrecht halten und so drehen, dass die beiden Stifte mit dem größten Abstand im Stiftsockel nach unten zeigen.
- Stiftsockel vorsichtig bis zum Anschlag in die Fassung des Röhrenständers schieben. Anschlussbelegung:
- Für die Kathodenheizung Buchsen F<sub>1</sub> und F<sub>2</sub> des Röhrenständers an rückseitigen Ausgang des Hochspannungsgerätes 10 kV anschließen.
- Buchsen C und X des Röhrenständers (Kathodenkappe und Fokussierelektrode) an Minuspol und Buchse A (Anode) an Pluspol des 5 kV/ 2 mA-Ausganges anschließen und Pluspol erden.

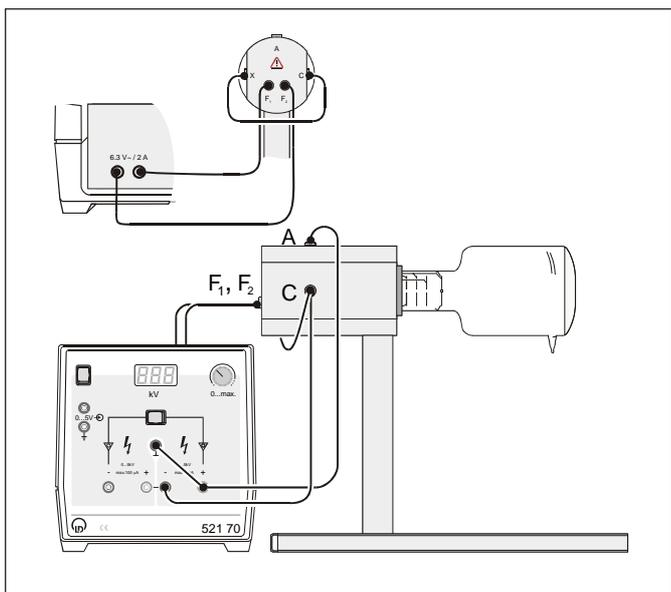


Abb. 5: Versuchsaufbau

**Durchführung**

- Beschleunigungsspannung  $U \leq 5 \text{ kV}$  anlegen und Beugungsbild beobachten.
- Ggf. zur Ausleuchtung einer anderen Probenstelle den Justiermagneten aufkleben und um dem Röhrenhals drehen und verschieben.
- Für verschiedene Beschleunigungsspannungen  $U$  zwischen 3 kV und 5 kV mit dem Präzisions-Messschieber die Durchmesser  $D_1$  und  $D_2$  der Beugungsringe auf dem Leuchtschirm bestimmen.
- Abstand  $L$  zwischen Graphitfolie und Fluoreszenzschirm messen.

*Hinweis: Präzisions-Messschieber aus Metall können zu einer Ablenkung des Elektronenstrahls und damit des Beugungsbildes führen. Ablenkung möglichst vermeiden!*

**Messbeispiel**

In der Beispielmessung wurden Beschleunigungsspannungen  $U$  zwischen 3 kV und 5 kV in Abständen von 0,5 kV angelegt und die Durchmesser  $D_1$  und  $D_2$  der Beugungsringe auf dem Leuchtschirm bestimmt. Die Messergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Die Messung des Abstands zwischen Graphitfolie und Fluoreszenzschirm ergab  $L = 13,3 \text{ mm}$ .

$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{D_1}{\text{cm}}$	$\frac{D_2}{\text{cm}}$
3,0	2,8	5,0
3,5	2,7	4,7
4,0	2,6	4,4
4,5	2,5	4,1
5,0	2,4	3,9

Tab. 1: Messbeispiel

**Auswertung**

**Bestimmung der Wellenlänge von Elektronen anhand der Beugung an einem polykristallinen Gitter**

Aus den Messwerten für die Durchmesser  $D_1$  und  $D_2$  der Beugungsringe auf dem Leuchtschirm (Tab. 1) erhält man die Wellenlänge  $\lambda$  durch Einsetzen in Gleichung (IV):

$$\lambda = 2d \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{D}{2L}\right)\right).$$

Für den Netzebenenabstand  $d$  werden die entsprechenden Literaturwerte  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  und  $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  eingesetzt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{D_1}{\text{cm}}$	$\frac{\lambda_1}{\text{pm}}$	$\frac{D_2}{\text{cm}}$	$\frac{\lambda_2}{\text{pm}}$
3,0	2,8	22,3	5,0	22,8
3,5	2,7	21,5	4,7	21,5
4,0	2,6	20,0	4,4	20,1
4,5	2,5	19,2	4,1	18,8
5,0	2,4	18,4	3,9	17,9

Tab. 2: Wellenlänge  $\lambda$ , bestimmt aus dem Durchmesser der Beugungsringe

Da die auftretenden Winkel  $2\vartheta$  zwischen  $5^\circ$  und  $10^\circ$  liegen, ist die Anwendung der vereinfachten Gleichung (V) mit Fehlern im Bereich weniger Prozent verbunden.

Die größte Unsicherheit ist in der Messung durch die Bestimmung der Ringdurchmesser gegeben. Die Ablesegenauigkeit beträgt etwa  $\pm 1$  mm, der Fehler damit ca. 3% für den äußeren und ca. 5% für den inneren Ring.

**Bestimmung der de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen aus der Beschleunigungsspannung**

Die de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen erhält man durch einsetzen in Gleichung (VI):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot U}}$$

Die Ergebnisse für die verschiedenen Werte von  $U$  sind in Tabelle 3 zusammengefasst (mit  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js für die Plancksche Konstante,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg für die Elektronenmasse und  $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$  C). Zum Vergleich sind die Ergebnisse  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  dargestellt, die man durch der Auswertung der Durchmesser der Beugungsringe erhält.

$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{\lambda_{\text{deBroglie}}}{\text{pm}}$	$\frac{\lambda_1(D_1)}{\text{pm}}$	$\frac{\lambda_2(D_2)}{\text{pm}}$
3,0	22,3	22,3	22,8
3,5	20,7	21,5	21,5
4,0	19,4	20,0	20,1
4,5	18,3	19,2	18,8
5,0	17,3	18,4	17,9

Tab. 3: de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen im Vergleich zu den aus den Beugungsringen bestimmten Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  (aus Tab. 2)

Die Genauigkeit des Hochspannungsgeräts beträgt 3%. Die Werte für die Wellenlänge  $\lambda$  aus der Beschleunigungsspannung und den Durchmessern der Beugungsringe stimmen daher im Rahmen der Messgenauigkeit überein.

**Bestimmung der Netzebenenabstände von Graphit**

Zur Bestimmung der Netzebenenabstände  $d_1$  und  $d_2$  berechnet man zusätzlich die Werte  $\frac{1}{\sqrt{U}}$  (U: Beschleunigungsspannung; siehe Tab. 4) und trägt anschließend die Ringdurchmesser  $D_1$  und  $D_2$  über  $\frac{1}{\sqrt{U}}$  auf (siehe Abb. 6). Durch die Punkte wird jeweils eine Gerade mit der Gleichung  $D = k\sqrt{U}$  gelegt und die Steigungen  $k_1$  und  $k_2$  bestimmt.

$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{1}{\sqrt{U}} / \frac{1}{\sqrt{V}}$	$\frac{D_1}{\text{cm}}$	$\frac{D_2}{\text{cm}}$
3,0	0,0183	2,8	5,0
3,5	0,0169	2,7	4,7
4,0	0,0158	2,6	4,4
4,5	0,0149	2,5	4,1
5,0	0,0141	2,4	3,9

Tab. 4: Daten zu Abb. 6

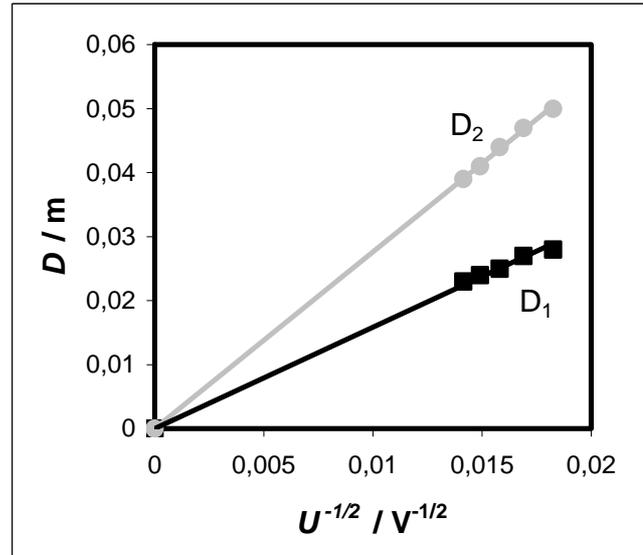


Abb. 6: Ringdurchmesser  $D_1$  und  $D_2$  in Abhängigkeit von  $\frac{1}{\sqrt{U}}$ . Die Geraden sind lineare Anpassungen mit den Steigungen  $k_1 = 1,58 \text{ m}\sqrt{V}$  und  $k_2 = 2,76 \text{ m}\sqrt{V}$ .

Mit  $k_1 = 1,58 \text{ m}\sqrt{V}$  für  $D_1$  und  $k_2 = 2,76 \text{ m}\sqrt{V}$  für  $D_2$  können daraus die Netzebenenabstände  $d_1$  und  $d_2$  des verwendeten Kristallgitters bestimmt werden (Gleichung VIII):

$$d = \frac{2 \cdot L \cdot h}{k \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot e}}$$

Man erhält mit  $L = 133$  mm:

$$d_1 = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$d_2 = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Dieses Ergebnis stimmt gut mit den Literaturwerten für die Netzebenenabstände  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  und  $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  überein.

**Hinweise:**

Nach dem Experiment von *Davisson* und *Germer* bestätigten weitere Experimente mit Teilchenwellen die de Broglie-Beziehung und damit den Welle-Teilchen-Dualismus. 1930 gelang *O. Stern* und *I. Esterman* die Beugung von Wasserstoffmolekülen und 1931 die Beugung von Heliumatomen an einem Lithium-Fluorid-Kristall.

Experimentelle Ergebnisse, die nur durch die Quantentheorie beschrieben werden, enthalten in ihren Grundformeln die Plancksche Konstante  $h$ . Nimmt man im vorliegenden Experiment die Netzebenenabstände  $d$  als bekannt an, so kann alternativ auch die Plancksche Konstante bestimmt werden:

$$h = \frac{d \cdot k \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot e}}{2 \cdot L}$$

$$k_1 = 1,58 \text{ m}\sqrt{V}, d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m} \rightarrow h = 6,8 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$k_2 = 2,76 \text{ m}\sqrt{V}, d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m} \rightarrow h = 6,9 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Literaturwert:  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$